TROISIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 heures

NOTA :

1° Les seuls livres ou instruments de calcul autorisés à cette épreuve sont :

a. Les tables de logarithmes à cinq décimales;

b. Les tables de fonctions de Flavien, Hennequin et Laborde;

c. Les règles et les cercles à calcul.

Le candidat indiquera, en tête de sa copie, la ou les tables dont il a fait usage.

2° Le symbole Log x désigne le logarithme népérien de x.

x désignant une variable réelle, on pose :

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} \operatorname{Log} \left| \frac{x+1}{x-1} \right|.$$

1° Quel est le domaine de définition de f ? Comparer $f(x)$ et $f(-x)$.

Dans toute la suite du problème, on suppose que $x \in]0,1[\cup]1, +\infty[$.

2° Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe lorsque $x \in]0,1[$.

3° On se propose maintenant de déterminer le signe de $f'(x)$ lorsque $x \in]1, +\infty[$.

Posons :

$$f'(x) = \frac{2x^4+3x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} u(x).$$

Calculer $u(x)$, puis $u'(x)$.

Montrer que l'équation $u'(x) = 0$ admet une seule racine dans l'intervalle $]1, +\infty[$.

Étudier les variations de $u(x)$ lorsque x décrit l'intervalle précédent.

En déduire que l'équation $u(x) = 0$ admet une seule racine, notée α, dans l'intervalle $]1, +\infty[$.

On ne demande pas dans cette question, ni dans la suivante, de calculer une valeur décimale approchée de α.

4° Donner le tableau de variation de $f(x)$ lorsque x décrit $[0,1[\cup]1, +\infty[$.

5° On appelle (C) la courbe dont l'équation, par rapport à un repère orthogonal (Ox, Oy), est $y = f(x)$.

Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C). Déterminer, lorsque $x \to +\infty$, la partie principale de $[f(x) - 2x]$, $\frac{1}{x}$ étant pris pour infiniment petit principal. En déduire la position de (C) par rapport à (D).

6° On se propose dans cette question d'étudier les points d'intersection de (C) et de (D) autres que l'origine.

Posons :

$$f(x) - 2x = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} v(x).$$

Calculer $v(x)$, puis $v'(x)$.

Quel est le signe de $v'(x)$ si $x \in]0,1[$?

En déduire que l'équation $v(x) = 0$ admet une racine unique, notée β, dans $]0,1[$.

Montrer ensuite que l'équation $v'(x) = 0$ admet une racine unique dans $]1, +\infty[$.

Étudier les variations de $v(x)$ lorsque x décrit le même intervalle. En déduire que l'équation $v(x) = 0$ admet une racine unique, notée γ, dans $]1, +\infty[$.

7° Déterminer la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut de α. Il est recommandé pour cela de commencer par calculer $u(1,2)$.

Calculer ensuite une valeur approchée de $f(\alpha)$.

8° Déterminer la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut de β. On devra pour cela commencer par calculer $v(0,9)$.

9° Déterminer de même la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut de γ. On commencera par calculer $v(1,5)$.

10° A l'aide des résultats précédents, dessiner soigneusement (C) sur papier millimétré, les unités étant les suivantes :

— 100 millimètres sur Ox;

— 50 millimètres sur Oy.

On ne tentera pas de déterminer le sens de concavité de (C).

– FIN –

E.N.S.A.E. 1978

M 109

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail